

vale il trattare *De secundis infinitis* del Sig. Giacomo Bernoulli, ed altri Autori, che di esso trattano.

74. Ma qualunque sia la formola differenziale, sia composta di due soli termini, si può generalmente, e più spedatamente per uso del seguente Canone, in cui gl'esponenti m, n, r possono essere intieri, razionali, e negativi, ed il quale si può produrre a quanti termini si vuole, giacchè da quanto pochi, abbastanza si manifesta la legge, con cui si forma.



CAPO

$$\int y^{t-m} dy \times \sqrt{b+cy}^n = \frac{y^{t-m+1}}{t-m+1} \times \frac{1}{\sqrt{b+cy}^n} + \frac{ny^{t-m+1}}{2(t-m+1)} \times \frac{1}{\sqrt{b+cy}^{n-1}} + \frac{n(n-1)y^{t-m+1}}{2 \times 2(t-m+1)} \times \frac{1}{\sqrt{b+cy}^{n-2}} + \dots$$

La maniera di ritrovare esse canoni è questa. Si supponga che sia l'espressione

$$\int y^{t-m} dy \times \sqrt{b+cy}^n = Ay^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^n + By^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + Cy^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^{n-2} + \dots$$

Adunque differenziando la finita equazione, avremo pure

$$y^{t-m} dy \times \sqrt{b+cy}^n = tAy^{t-m} \sqrt{b+cy}^n + (t-m)Ay^{t-m-1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + nBy^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + \dots$$

cioè dividendo per $\sqrt{b+cy}^n$, ed ordinando i termini,

$$y^{t-m} dy = tAy^{t-m} + (t-m)Ay^{t-m-1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + nBy^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + \dots$$

e trasportando il termine $y^{t-m} dy$ dall'altra parte, sarà

$$tAy^{t-m} + (t-m)Ay^{t-m-1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + nBy^{t-m+1} \sqrt{b+cy}^{n-1} + \dots = 0$$

Ridotta adunque al zero l'equazione, faranno pure eguali al zero i coefficienti di ciascun termine, per lo che avremo tante equazioni, quante sono le arbitrarie affezioni A, B, C, D &c., con le quali equazioni esse arbitrarie si determineranno. Prendendo talor $A=1$, cioè $A=\frac{1}{t-m+1}$, e sostituendo il valore di A , si avrà $tB + (t-m)A = 0$, cioè $B = \frac{(t-m)A}{t}$, e sostituendo il valore di B , si avrà $tC + (t-m)B = 0$, cioè $C = \frac{(t-m)(t-m-1)A}{t \times (t-1)}$, e sostituendo il valore di C , si avrà $tD + (t-m)C = 0$, cioè $D = \frac{(t-m)(t-m-1)(t-m-2)A}{t \times (t-1) \times (t-2)}$, e così di mano in mano si avranno i valori quanti si vogliono per altrettante affezioni costanti, e

questi valori posti nella finita equazione si somministreranno appunto il canone all'uso.

Se gl'esponenti m, n, r della proposta formola saranno tali, che il canone, o la serie infinita d'integrazione, cioè che qualche termine diventi $= 0$ (nel qual caso l'arbitrario $= 0$ tutti gl'altri, che vengono dopo) la serie sarà finita, e terminata, vale a dire algebricamente l'integrale della proposta formola differenziale, ma è necessario, che la serie prima d'interruptione nel numeratore, cioè che prima diventi il numeratore $= 0$ del denominatore, perchè se prima sarà $= 0$ il denominatore, quel termine, ed indi gl'altri dopo faranno eguali all'infinito. Acciò che la serie d'interruptione nel numeratore, si dappo che si $-\frac{1}{2} - m$ eguale ad un numero intero positivo.

Che se gl'esponenti t, m, n della proposta formola saranno tali, che la serie non s'interrumpa mai, allora il non l'espressione della proposta formola in un'altra equazione, cioè la formola per esempio $y^{t-m} dy \times \sqrt{b+cy}^n$ si moltiplicherà in qualsivoglia $y^{t-m+1} dy \times \sqrt{b+cy}^{n-1}$, che sposta alla prima, e si provi se così si fa, e se no, la formola non sarà algebricamente integrabile con questa canone. Se la formola sotto $y^{t-m} dy \times \sqrt{b+cy}^n$, allora i termini del canone faranno positivi.

Sia $x^2 dx \sqrt{bx+ax}$, cioè $x^2 \times \frac{1}{2} dx \times \sqrt{bx+ax}$. Sarà $t=3, m=0, n=\frac{1}{2}$, e $-\frac{1}{2} - m = -\frac{1}{2}$, e non è un numero intero positivo, e però sarà zero il quarto termine, e gl'altri appresso della serie, e però avremo

$$\int x^2 dx \sqrt{bx+ax} = \frac{x^3 \sqrt{bx+ax}}{3} + \frac{ax}{2} \times \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{\sqrt{bx+ax}} + \frac{ax^2}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{bx+ax}} + \dots$$

Sia $\frac{dx}{x^2 \sqrt{bx+ax}}$, sarà $t=-1, m=0, n=\frac{1}{2}$, e $-\frac{1}{2} - m = -\frac{1}{2}$, e non è un numero intero positivo, e però sarà zero il secondo termine della serie, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{bx+ax}} = \frac{1}{x} \sqrt{bx+ax} + \frac{a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{bx+ax}} + \dots$$